

Cours 22

G : groupe

k : corps (ou même un anneau commutatif).

Def Une représentation de G sur k est un k -espace vectoriel V muni d'une action (linéaire) de G :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ g, v &\longmapsto g.v \end{aligned}$$

† g (i) $g_1(g_2.v) = (g_1 g_2).v$ $\forall g_1, g_2 \in G, \forall v \in V$

(ii) $1_G.v = v$ $\forall v \in V$

(iii) $g(v+v') = g(v) + g(v')$ $\forall v, v' \in V$
(linéaire) $\forall \lambda \in k$.
et $g(\lambda v) = \lambda g(v)$

Autrement dit ^(Exo), une représentation de G est la donnée d'un morphisme de groupe

$$G \xrightarrow{f} GL(V)$$

$$g \longmapsto \left(\begin{aligned} f_g : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto g.v = f_g(v) \end{aligned} \right)$$

Rappel : une action de groupe G sur un ensemble X
 est $G \times X \longrightarrow X$ $\uparrow$ (i)
 $(g, x) \mapsto g \cdot x$ $\uparrow$ (ii)

c'est la même donnée d'un morphisme de gp

$$G \xrightarrow{\quad} \mathcal{G}_X$$

Rappel : k corps (anneau comm.)
 G groupe

$$k[G] := \text{Vect}_k \{ \delta_g \mid g \in G \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i} \mid g_i \in G, \lambda_i \in k \right\}$$

c'est une k -algèbre :

$$k[G] \otimes_k k[G] \longrightarrow k[G]$$

$$(\delta_g, \delta_{g'}) \longmapsto \delta_g \cdot \delta_{g'} = \delta_{gg'}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i}, \sum_{j=1}^m \lambda'_j \delta_{g'_j} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda'_j \delta_{g_i g'_j}$$

$$k \longrightarrow k[G]$$

$$\lambda \longmapsto \lambda \cdot \delta_e$$

Prop La donnée d'une représentation de G
est la même que la donnée d'un
 $k[G]$ -module

Preuve:

$$\{ G\text{-rep.} \} \stackrel{\text{Rep } G}{\longleftrightarrow} k[G]\text{Mod}$$

$$(V, \rho: G \rightarrow GL(V)) \longmapsto \left(\begin{array}{l} k[G] \times V \longrightarrow V \\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i, v \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_{g_i}(v) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} (V, \rho: G \rightarrow GL(V)) \\ g \mapsto \rho_g: V \rightarrow V \\ v \mapsto \rho_g \cdot v \end{array} \right) \longleftarrow V$$

□

Def (Morphisme)

Soient $(V_1, \rho_1: G \rightarrow GL(V_1))$, $(V_2, \rho_2: G \rightarrow GL(V_2))$
deux représentations de G .

Un morphisme de représentations de V_1 vers V_2
est un morphisme de k -e.v. $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

$$\text{tq } \forall g \in G, \quad \begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array} \quad \text{est commutatif}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{concrètement} \\ \text{"G-linéarité"} \end{array}, \quad \forall v \in V_1 \quad g.f(v) = f(g.v) \right)$$

Notation

$$\text{Hom}_G(V_1, V_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{morphisms de rep. de } G \\ \text{de } V_1 \text{ vers } V_2 \end{array} \right\}$$

Rq $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est un k -e.v. :

$$\begin{cases} (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) & \forall v \in V_1 \\ (\lambda.f)(v) = \lambda.f(v) & \forall \lambda \in k \end{cases}$$

Prop $V_1, V_2 \in \text{Rep}_G (\simeq k[G]\text{Mod})$

$$\text{Hom}_G(V_1, V_2) = \text{Hom}_{k[G]}(V_1, V_2)$$

Preuve: $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = \left\{ f: V_1 \rightarrow V_2 \mid \begin{array}{l} f: k\text{-lin.} \\ g.f(v) = f(g.v) \quad \forall v \in V, \forall g \in G \end{array} \right\}$ ①

$$\text{Hom}_{k[G]}(V_1, V_2) = \left\{ f: V_1 \rightarrow V_2 \mid \begin{array}{l} f: k\text{-lin.} \\ (\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i}).f(v) = f((\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i}).v) \end{array} \right\}$$
 ②

② $\Rightarrow$ ①:

$$\begin{array}{ccc} \delta_g.f(v) & = & f(\delta_g.v) \\ \parallel & & \parallel \\ g.f(v) & & f(g.v) \end{array}$$

① $\Rightarrow$ ②:

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i}).f(v) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\delta_{g_i}.f(v)}_{\parallel} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (g_i.f(v)) \\ &\parallel \quad \parallel \textcircled{1} \\ \sum_{i=1}^n (\lambda_i \delta_{g_i})f(v) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\delta_{g_i}.v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(g_i.v) \end{aligned}$$

□

ccl: On a une équivalence de catégories

$$\{ G\text{-représentations} \} \longleftrightarrow k[G]\text{Mod}$$

Terminologie: "G-représentation" = "G-module"

Rq (ker, Im, Coker, inj, surj, isom, ...)

Soit $f: V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de G-modules

- $\ker(f)$ est un G-module. (car $\ker$ d'un morph. de mod est un sous-module.)

- $\text{Im}(f)$ _____ (Im)
- $\text{Gker}(f)$ _____ (car quotient d'un module par un sous-module est un module)

Constructions :

- Somme directe :

Soient V, V' deux rep de G (i.e. $G\text{-Mod}$)

$$V \oplus V' \in G\text{-Mod}.$$

Plus généralement, $\{V_i\}_{i \in I}$ famille de $G\text{-module}$

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \in G\text{-Mod}.$$

(Concrètement : l'espace vectoriel $\bigoplus_{i \in I} V_i$ est muni de l'action de G coordonnée par coordonnée.

$$g \cdot (v_i)_{i \in I} = (g \cdot v_i)_{i \in I} \quad \forall g \in G$$
)

- Dual :

Soit V un $G\text{-module}$.

$$V^\vee := \text{Hom}_k(V, k) \in k\text{-Vect}.$$

( NON $\text{Hom}_{k[G]}(V, k[G])$)

Lemme $V^\vee$ admet une structure de $G\text{-Mod}$.

Preuve: $V^\vee := \{ \ell: V \rightarrow k \mid \ell = k\text{-lin.} \}$.

On définit $G \times V^\vee \longrightarrow V^\vee$

$$(g, \ell) \longmapsto \begin{pmatrix} g.\ell: V \longrightarrow k \\ \ell \circ g^{-1} \quad v \longmapsto \ell(g^{-1}v) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (g_1.(g_2.\ell))(v) &= (g_2.\ell)(g_1^{-1}.v) \\ &= \ell(g_2.(g_1^{-1}.v)) = \ell((g_2^{-1}.g_1^{-1})v) \\ &= \ell((g_1.g_2)^{-1}.v) \\ &= ((g_1.g_2).\ell)(v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_1.(g_2.\ell) = (g_1.g_2).\ell$$

$$\text{(ii)} \quad e_G.\ell = \ell \quad \checkmark$$

$$\text{(iii)} \quad g.\ell \in GL(V) \quad \checkmark$$



• Hom "interne"

Non: $\text{Hom}_{k[G]}(V_1, V_2)$

Soient V_1, V_2 deux G -modules.

$$\text{Hom}_k(V_1, V_2) = \{ f: V_1 \rightarrow V_2 \mid f = k\text{-lin.} \}$$

Construction/Lemme $\text{Hom}_k(V_1, V_2)$ est muni d'une structure naturelle de G -module.

Preuve:

$$G \times \text{Hom}_k(V_1, V_2) \longrightarrow \text{Hom}_k(V_1, V_2)$$

$$(g, f) \longmapsto \left(\begin{array}{l} g.f : V_1 \longrightarrow V_2 \\ \parallel \\ v \mapsto g.f(g^{-1}v) \\ \hline \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1}) \end{array} \right)$$

$$(i) \quad \underline{g(g'.f)} \stackrel{?}{=} (gg').f$$

$$\rho_2(g) \circ (g'.f) \circ \rho_1(g^{-1})$$

$$\rho_2(gg') \circ f \circ \rho_1(gg'^{-1})$$

$$\rho_2(g) \circ \rho_2(g') \circ f \circ \rho_1(g'^{-1}) \circ \rho_1(g^{-1})$$

ρ_1 et ρ_2 sont des morphismes de gp .

(ii) ✓

(iii) ✓



Produit tensoriel

Soient $V, W \in G\text{-Mod.}$

$$V \otimes W := V \otimes_k W$$

Lemme / construction $V \otimes W$ est muni une structure naturelle de $G\text{-Mod.}$

Preuve: $G \times (V \otimes_k W) \longrightarrow V \otimes_k W$

$$(g, v \otimes w) \longmapsto g.v \otimes g.w$$

(Exo: définir proprement cette application par la propriété universelle de $\otimes_k$)

$$(i) \quad g_1(g_2(v \otimes w)) = g_1(g_2 v \otimes g_2 w) = g_1 g_2 v \otimes g_1 g_2 w \\ = (g_1 g_2)(v \otimes w).$$

(ii) ✓

$$(iii) \quad g(v \otimes w + v' \otimes w) = g((v + v') \otimes w) \quad \dots$$

$$g(\lambda v \otimes w) = \lambda g(v \otimes w) \quad \dots$$

□

Prop Soient $V, W \in G\text{-Mod}$ avec $\dim_k V < \infty$
 $\dim_k W < \infty$
 alors on a un isomorphisme canonique de $G\text{-mod}$.

$$\text{Hom}_k(V, W) \cong V^\vee \otimes_k W$$

Preuve:

$$\bullet \quad V^\vee \times W \xrightarrow{\bar{\Phi}} \text{Hom}_k(V, W)$$

$$(l, w) \mapsto \left(\begin{array}{c} V \longrightarrow W \\ v \mapsto l(v)w \end{array} \right)$$

$\bar{\Phi}$ est bien k -bilineaire $\Rightarrow$ on a un morph.
 (Exo) k -lin.

$$V^\vee \otimes W \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}_k(V, W)$$

$$\bullet \quad \text{Hom}_k(V, W) \xrightarrow{\Psi} V^\vee \otimes W$$

$$f \mapsto \Psi(f) = \sum_i l_i \otimes f(e_i)$$

où $\{l_i\}_i$ est la base duale de la base $\{e_i\}_i$ de V
 $\mathcal{P}$

$$l_i(e_j) = \delta_{ij}$$

$\Psi(f)$ ne dépend pas du choix de base:

Soit (e_i) une base de V

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) P$$

$$P \in GL_n(k)$$

Soit $(l'_1, \dots, l'_n)$ la base duale de $(e'_1, \dots, e'_n)$

Alors

$$\begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = I_n$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ Q \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) P = Q \cdot P \\ \parallel \\ I_n \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Q = P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n l_i f(e_i) \stackrel{\checkmark}{=} \sum_{i=1}^n l'_i f(e'_i)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & (f(e_1), \dots, f(e_n)) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad \parallel \qquad f(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} \\ & \parallel \\ & \underline{\underline{f(e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}}} = \underline{\underline{f(e'_1, \dots, e'_n) P^{-1} P \begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} & \underline{\Phi} \circ \underline{\Psi} = \text{id} \quad , \quad \text{en particulier} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{\Phi} \text{ inj} \\ \underline{\Psi} \text{ surj} \end{array} \right\} \\ & \forall l \in V^\vee, w \in W \end{aligned}$$

$$\underline{\Phi}(l \otimes w) = l(-) \cdot w : V \rightarrow W$$

$$\underline{\Psi}(\underline{\Phi}(l \otimes w)) = \sum_{i=1}^n l(-) \otimes l(e_i) \cdot w = \sum_{i=1}^n l(e_i) l_i(-) \otimes w$$

$$\text{vérifier} \quad \sum_{i=1}^n l(e_i) l_i(-) \otimes w = l \otimes w \in V^\vee \otimes W$$

il suffit de remarquer que

$$\sum_{i=1}^n l(e_i) l_i = l \quad (\text{Exo})$$

$$\bullet \quad \dim_k V < \infty, \dim_k W < \infty \Rightarrow \underline{\Phi}, \underline{\Psi} \text{ sont isom. de } k\text{-e.v.}$$

• Il rest à vérifier que l'isom.

$$\Phi: V^V \otimes W \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_k(V, W)$$

$$l \otimes w \mapsto l(-)w$$

est un morphisme de G -module

$$\forall g \in G \quad \forall v \in V$$

$$\Phi(g \cdot (l \otimes w))(v) \stackrel{v}{=} \Phi(g \cdot l \otimes g \cdot w)(v)$$

$$\Phi(g \cdot l \otimes g \cdot w)(v)$$

$$(g \cdot l)(v) g \cdot w$$

$$\underbrace{l(g^T v)}_{\in k} g \cdot w$$

$$\Phi(l \otimes w)(g \cdot (l^T v) w)$$

$$\parallel$$

$$g \cdot \underbrace{(l(g^T v) w)}_{\in k}$$

$$\parallel$$

$$l(g^T v) g \cdot w$$

